LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrerbildung@LMU

GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Prof. Dr. Stefan Ufer, Dr. Alexander Rachel, Constanze Schadl
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, LMU München

Lehrerbildung@LMU

reflect@math.lmu connexercise@math.lmu

Projektbeschreibungen und theoretischer Hintergrund

Die bisherigen Veranstaltungen der Fachmathematik sind zwar inhaltlich spezifisch auf die Anforderungen des Staatsexamens abgestimmt, sie stehen jedoch noch weitgehend unverbunden neben der fachdidaktischen Ausbildung und den Erfahrungen der Studierenden im Unterricht. Vielen gelingt es bisher kaum, eine Verbindung zwischen den fachlichen Studieninhalten und dem praktischen Einsatz dieser Inhalte in der Schule herzustellen.

Um das Potential fachlicher Kompetenzen zur Analyse, Reflexion und Aufbereitung von Unterrichtsinhalten als Ressource zu nutzen, zielen die beiden Projekte der Mathematikdidaktik reflect@math.lmu und connexercise@math.lmu darauf ab, die doppelte Diskontinuität (Klein, 1908; s.u.) aus dem Weg zu räumen und bei den Studierenden des Lehramts an Gymnasien bzw. Realschulen ein Bewusstsein für die Schnittstellen zwischen der universitären Fachmathematik und der Schulmathematik zu schaffen. Die beiden Projekte setzen den Schwerpunkt auf die Einführungsveranstaltungen (Mathematik I bis III), sodass dieser Brückenschlag bereits von Studienbeginn an umgesetzt werden kann.

> *„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat, und natürlich vergisst er daher alle diese Dinge rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muss er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbstständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so nimmt er bald die althergebrachte Unterrichtstradition auf, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat."* (Klein, 1908)

Horizon content knowledge

Horizon content knowledge umfasst die Fähigkeit, schulmathematische Themen von einem höheren Standpunkt aus zu betrachten (Ball, Thames & Phelps, 2008) und ist Bestandteil einer professionellen Lehrerkompetenz (s. **Abb. 1**).

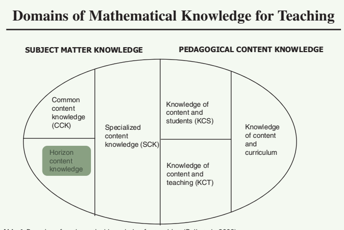

Abb. 1: Domains of mathematical knowledge for teaching (Ball et al., 2008)

„Horizon knowledge is an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum.

First-grade teachers, for example, may need to know how the mathematics they teach is related to the mathematics students will learn in third grade to be able to set the mathematical foundation for what will come later.

It also includes the vision useful in seeing connections to much later mathematical ideas."

(Ball et al., 2008)

reflect@math.lmu

reflect@math.lmu unterstützt die Studierenden, die im Studium erworbenen fachlichen Kompetenzen mit fachdidaktischen Ideen und Methoden zu verknüpfen. Um dies zu erreichen, wird für das zweite Studienjahr ein Veranstaltungsformat entwickelt, in welchem basierend auf exemplarischen Inhalten des ersten Studienjahres explizit Bezüge zwischen den universitären mathematischen Kenntnissen bzw. Arbeitsweisen und der Schulmathematik in den Fokus gerückt werden. Nach einer erstmaligen Pilotierung im Sommersemester 2016 rückt nun eine Weiterentwicklung sowie semesterweise Implementation des Formats im Sinne eines Design-Based Research-Ansatzes in den Vordergrund.

Umsetzung

Im Rahmen des Seminars *Reflexion von Schulmathematik* betrachten die Studierenden des zweiten Studienjahres schulmathematische Aufgaben von einem höheren Standpunkt aus. Dabei soll ein lernerzentriertes Arbeiten es den Teilnehmern ermöglichen, zunächst eigenständig die Chance der Brückenschläge zu nutzen, bevor gemeinsame fachliche Besprechungen stattfinden und die Schnittstellen zwischen Hochschul- und Schulmathematik diskutiert werden. Das 90 minütige Seminar findet bereits in der Folge zum zweiten Mal statt und wird wöchentlich für eine maximale Teilnehmerzahl von 30 Studierenden angeboten.

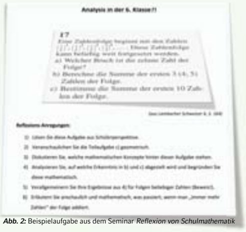

Abb. 2: Beispielaufgabe aus dem Seminar *Reflexion von Schulmathematik*

Beispielaufgabe

s. **Abb. 2**

Evaluation

- **Fragestellungen**
  - Wird Berufsfeldbezug durch das Seminar gestärkt?
  - Wird Lernerfolg bei fachlichen Inhalten erreicht?
  - An welchen Stellen können Verbesserungen vorgenommen werden?

- **Methodik**
  - Befragung der Seminarteilnehmer/innen zu Semesterbeginn und Semesterende
  - Fragebogen
    - o Fachmathematische Kompetenz (Niveau erstes Studiensemester)
    - o Interesse, Motivation und Einschätzung des Berufsfeldbezugs (4-stufige Likert-Skalen, interne Konsistenzen (Cronbachs Alpha) akzeptabel bis gut)
    - o Beispielitem: *„Das in den mathematischen Fachveranstaltungen erworbene Wissen wird mir helfen, besser zu unterrichten."*
  - Im Seminar: Student-Clicker-Abfragen zu Schwierigkeit und Eignung nach jeder Aufgabe

- **Ergebnisse**
  - Lernerfolg:
    - o vor Durchführung des Seminars: relativ niedrige Lösungsrate
    - o Steigerung um ca. 43% (Vortest: $M = 0{,}347$ (0,049), Nachtest: $M = 0{,}497$ (0,040), s. **Abb. 3**)
    - o Statistisch höchst signifikant (T(18) = -5,55; p < .001)
  - Berufsfeldbezug der fachmathemaischen Ausbildung:
    - o Steigerung um ca. 16% (Vortest: $M = 0{,}390$ (0,043), Nachtest: $M = 0{,}465$ (0,035), s. **Abb. 4**)
    - o Statistisch signifikant (T(18) = -2,14; p = .046)

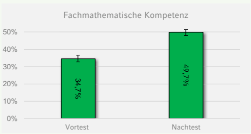

Abb. 3: Fachmathematische Kompetenz vor und nach Teilnahme an dem Seminar *Reflexion von Schulmathematik*

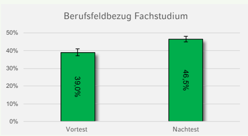

Abb. 4: Einschätzung der Auswirkungen des Fachstudiums *auf den späteren Beruf* vor und nach Teilnahme am Seminar

- **Meinungen von unseren Studierenden**
  zur Frage, *welche Aspekte (Inhalte, Aufgaben, …) im nächsten Semester beibehalten werden sollten:*
  - „Es waren gute Themen, bei denen der Bezug Uni – Schule meist schön deutlich war."
  - „Die Aufbereitung einer Aufgabe aus dem Schulkontext, die auf ihr hochschulisches Potential untersucht wird, ist sehr gut."
  - „Die Begeisterung für das Seminar, die Studenten zu motivieren und zur Auseinandersetzung mit dem „Schnitt" zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu bewegen."
  - „Alle Inhalte waren sehr interessant und es hat Spaß gemacht, die Verbindungen zur Hochschulmathematik zu erkennen und zu verstehen."

Zur Frage, welche Veränderungen im nächsten Semester vorgenommen werden sollten wurde u.a. der Wunsch nach anderen Themenbereichen („Aufgreifen eines Stochastik-Themas") sowie noch ausführlichere Diskussionen über die Zusammenhänge zwischen Fachinhalten und Schulstoff genannt.

Ausblick

Durch eine wiederholte Durchführung des Seminars soll es gelingen, das bisherige Konzept auszubauen und weiter zu verbessern. Dies erscheint auch mit Blick auf die Vorplanung eines größeren Formates sinnvoll. Ziel ist schließlich die Integration in den Studienplan.

connexercise@math.lmu

connexercise@math.lmu fokussiert zunächst die Entwicklung eines Pools an Übungsaufgaben, um sowohl fachliche Vorlesungsinhalte zu vertiefen als auch sachanalytische Bezüge zur Schulmathematik aufzuzeigen. In einem zweiten Schritt werden die Aufgaben in einen Vorlesungszyklus – begleitet von der Fachdidaktik – integriert, erprobt und angepasst, wobei entsprechende Materialien den Dozenten nach einem gemeinsamen Austausch und entsprechender Schulung zur Verfügung gestellt werden. Die Erprobung und Implementation der Aufgaben wird durch eine Moodle-basierte Diskussionsplattform unterstützt.

Umsetzung

Bisher wurden – unter anderem auch im Rahmen einer Zulassungsarbeit zum Thema *Stärkung des Berufsfeldbezuges für Lehramtsstudierende der Mathematik durch Aufgaben zur Analysis* – Aufgaben konzipiert und qualitativ durch Videointerviews (*Thinking aloud*) evaluiert.

Beispielaufgabe

Ihnen ist aus der Analysis I Vorlesung die folgende geometrische Reihe bekannt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \qquad \text{für } 0 < q < 1$$

a) Betrachten Sie den Beweis, der aus der geometrischen Summenformel $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ folgt: Induktionsbeweis, nur Nachvollziehen notwendig.

b) Welche Antwort würden Sie geben, wenn ein Schüler fragt, ob $0,\overline{9}$ gleich 1 ist. Beweisen Sie Ihre Antwort auf universitärem Niveau unter Verwendung der obigen Formel ($\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$)(Hinweis 1; **Abb. 5, Fig. 1**).

Lösung: $0,\overline{9} = 0{,}999999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots$

$a = 0{,}9,\ q = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad 0,\overline{9} = \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = \frac{0{,}9}{0{,}9} = 1$

c) Erklären Sie nun die Fragestellung, ob $0,\overline{9}$ gleich 1 ist, anschaulich auf Schulniveau. (Hinweis 2; **Abb. 5, Fig. 2**)

Lösung:
$$\begin{aligned} x &= 0,\overline{9} \\ 10x &= 9,\overline{9} \quad | -x \\ 9x &= 9 \quad |:9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Alternative:
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} &= 0,\overline{3} \quad | \cdot 3 \\ \tfrac{3}{3} &= 1 = 0,\overline{9} \end{aligned}$$

Fig. 1: Hinweis für die Bearbeitung der Aufgabe auf universitärem Niveau

Fig. 2: Hinweis für die Bearbeitung der Aufgabe auf Schulniveau

Abb. 5: Hinweiskarten, die im Rahmen der Studie *Stärkung des Berufsfeldbezugs für Lehramtsstudierende der Mathematik durch Aufgaben zur Analysis* eingesetzt wurden

Evaluation

- **Fragestellungen**
  - Besteht das Bedürfnis nach berufsfeldorientierten, schulbezogenen Aufgaben bei Lehramtsstudierenden zur Verbesserung des Fachstudiums?
  - Welches Potential steckt hinter solchen Aufgaben?
  - Werden die Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik durch die konzipierten Aufgaben transparent?
  - An welchen Stellen lassen Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgaben auf notwendige Veränderungen schließen?

- **Methodik**
  - Studienteilnehmer: 10 Studierende des gymnasialen Lehramtes im 2. Semester
  - Bearbeitung von 2 Aufgaben pro Studienteilnehmer (inklusive Hinweiskarten bei Bedarf)
  - Fragebogen, Videoaufzeichnungen während der Aufgabenbearbeitungen (Thinking aloud) sowie Interviews

- **Ergebnisse**
  - Es besteht das Bedürfnis nach berufsfeldbezogenen Aufgaben
  - Die Motivation, sich mit der Hochschulmathematik zu befassen, kann durch den Bezug zur Schulmathematik gesteigert werden
  - Die Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik werden durch die konzipierten Aufgaben transparent, können allerdings bisher kaum von den Studierenden selbst hergestellt werden
  - Ohne Hilfestellungen (Hinweiskarten) sind die Aufgaben seitens der Studierenden nur schwer lösbar. Möglicherweise kann eine häufigere Auseinandersetzung mit entsprechenden Aufgabenformaten an dieser Stelle Abhilfe verschaffen. Sinnvoll erscheint zudem der Einsatz in Tutorien.

- **Meinungen von unseren Studierenden**
  zu der Frage, *welche Auswirkungen Schulbezug in den Aufgaben haben kann:*
  - *„Dass Mathematikstudenten erkennen, dass es einen Sinn hat, die Reihenformel zu verstehen."*
  - *„Ich fände […] [den Einsatz derartiger Aufgaben in den Übungsgruppen der Fachvorlesungen] super, weil man auf diese Weise verstehen würde, wofür man das Ganze lernt. Dadurch wäre der Inhalt nicht so abstrakt und nicht ganz so weit weg."*
  - *„Ich würde den Schulbezug als Motivationsschub empfinden."*

Ausblick

Als weitere Projektphasen sind zunächst die Entwicklung weiterer Aufgaben sowie deren Einzelevaluation angedacht. Dabei soll der Fokus nicht nur auf den Bereich der *Analysis* beschränkt, sondern auch auf die *Lineare Algebra* ausgedehnt werden. Zeitgleich soll die Einrichtung, Evaluation und Adaption der Moodle Plattform stattfinden, bevor in einem weiteren Schritt die Dokumentation der Ergebnisse in Form einer Handreichung für die Dozenten erfolgt. Daran anschließend werden die Dozierenden entsprechend geschult und bei der Implementation begleitet.

Literatur

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leipzig: Teubner.

Kontakt: Dr. Alexander Rachel • Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik • LMU München • Email: rachel@math.lmu.de
Constanze Schadl • Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik • LMU München • Email: schadl@math.lmu.de